

34. Priroda rešenja kvadratne jednačine

ZADATAK 1. Ispitaj prirodu rešenja kvadratne jednačine u zavisnosti od realnih parametara a , k i m :

a) $ax^2 - 5x + 6 = 0$,

b) $mx^2 + (2m + 5)x + m = 0$,

c) $4x^2 + 8x + m + 4 = 0$,

d) $2kx^2 + 3x - 1 = 0$,

Rešenje:

a) $ax^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow D = 25 - 24a$, što daje rešenja:

- za $a > \frac{25}{24}$ ($D < 0$) rešenja su konjugovano kompleksna;
- za $a = \frac{25}{24}$ ($D = 0$) rešenja su realna i jednaka;
- za $a < \frac{25}{24}$ ($D > 0$) rešenja su realna i različita.

b) $mx^2 + (2m + 5)x + m = 0 \Rightarrow D = (2m + 5)^2 - 4m^2 = 25 + 20m$, što daje rešenja:

- za $m < -\frac{5}{4}$ ($D < 0$) rešenja su konjugovano kompleksna;
- za $m = -\frac{5}{4}$ ($D = 0$) rešenja su realna i jednaka;
- za $m > -\frac{5}{4}$ ($D > 0$) rešenja su realna i različita.

c) $4x^2 + 8x + m + 4 = 0 \Rightarrow D = -16m$ što daje rešenja:

- za $m > 0$ ($D < 0$) rešenja su konjugovano kompleksna;
- za $m = 0$ ($D = 0$) rešenja su realna i jednaka;
- za $m < 0$ ($D > 0$) rešenja su realna i različita.

d) $2kx^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow D = 9 + 8k$ što daje rešenja:

- za $k < -\frac{9}{8}$ ($D < 0$) rešenja su konjugovano kompleksna;
- za $k = -\frac{9}{8}$ ($D = 0$) rešenja su realna i jednaka;
- za $k > -\frac{9}{8}$ ($D > 0$) rešenja su realna i različita.

ZADATAK 2. Za koje vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ jednačina $kx^2 + (k + 1)x + 2 = 0$ ima dvostruko rešenje?

Rešenje:

Kvadratna jednačina ima dvostruko rešenje (realna i jednaka rešenja) ako je diskriminanta jednaka nuli, tj. $D = 0$. Dalje je:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 8k = 0$$

$$k^2 - 6k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} \Rightarrow k_1 = 3 + 2\sqrt{2} \wedge k_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Znači, za dve vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ ($k_1 = 3 + 2\sqrt{2} \wedge k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$) kvadratna jednačina $kx^2 + (k+1)x + 2 = 0$ će imati dvostruko rešenje.

ZADATAK 3. Za koje vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ jednačina $kx^2 + 6x + 3 = 0$ nema realna rešenja?

Rešenje:

Ako kvadratna jednačina nema realna rešenja, onda ona ima konjugovano kompleksna rešenja, a to se dešava za $D < 0$. Zato je:

$$D < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$36 - 12k < 0$$

$$k > 3.$$

Dakle, ako umesto k stavimo bilo koji realni broj veći od tri (bilo koji broj iz intervala $k \in (3, +\infty)$), dobićemo kvadratnu jednačinu koja nema realna rešenja.

DOMAĆI ZADATAK: Vene T. Bogoslavov 2 – 473, 474.