

Složena funkcija, inverzna funkcija

1. Odrediti funkciju $f(g(x))$, ako je

$$(a) f(x) = x^2 - 4, g(x) = 2x + 3$$

$$(b) f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \sin x$$

$$(c) f(x) = \frac{x-1}{3x+2}, g(x) = \frac{x-1}{2+x}$$

rešenje:

$$(a) f(g(x)) = 4x^2 + 12x + 5, (b) f(g(x)) = \sqrt[3]{\sin x}, (c) f(g(x)) = -\frac{3}{5x+1}$$

2. Odrediti $f(f(x))$, ako je

$$f(x) = \frac{4x+1}{x-1}$$

rešenje:

$$f(f(x)) = \frac{17x+1}{x+10}$$

3. Odrediti $f(x)$, ako je:

$$(a) f(x+5) = \frac{2x+13}{x+4}$$

$$(b) f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$

$$(c) f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$$

$$(d) f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{5x+4}{x-1}$$

rešenje:

$$(a) f(x) = \frac{2x+3}{x-1},$$

$$(b) f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$(c) f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

$$(d) f(x) = 3x - 1$$

4. Ako je $f(x-1) = 2x+3$, odrediti $f(f(x^2-x+1))$.

rešenje:

$$f(f(x^2-x+1)) = 4x^2 - 4x + 1$$

5. Ako je $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + x + 2$, odrediti $f(2)$.

rešenje:

$$f(x) = x^3 - 2x + 3, f(2) = 7$$

6. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, odrediti $f(\sqrt{3})$.

rešenje:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}, \quad f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

7. Data je funkcija $f(x) = 3x - 1$. Odrediti funkciju $g(x)$, ako je $f(3x + 1 + 3g(x)) = 27x + 29$.

rešenje:

$$g(x) = 2x + 3$$

8. Odrediti $f(x)$, ako je za $g(x) = 2x - 1$, $g(x^2 + x f(x)) = 4x^2 - 2x - 1$.

rešenje:

$$f(x) = x - 1$$

9. Odrediti $g(x)$, ako za $f(x) = x - 1$ važi $f(2^x + 2^{g(x)}) = 2^x + 8 \cdot 2^{2x} - 1$.

rešenje:

$$g(x) = 2x + 3$$

10. Odrediti kvadratnu funkciju za koju važi:

$$(a) f(0) = 3, f(1) = 1, f(-2) = 19$$

$$(b) f(0) = 6, f(1) = 5, f(2) = 10$$

rešenje:

$$(a) f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad (b) f(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

11. U kvadratnoj funkciji $f(x) = ax^2 + bx - 1$ odrediti parametre a i b tako da važi $f(x+1) - f(x) = 6x + 8$.

rešenje: $a = 3, b = 5$.

12. Data je funkcija $f(x) = x^2 + ax + 3$, gde je $a, x \in \mathbb{R}$, za koju važi $f(-1) = 4$.

(a) Izračunati $f(6)$,

(b) Rešiti jednačinu $f(f(x)) = 52$

rešenje: (a) $f(6) = 39$, (b) $x = \pm 2$

13. Odrediti inverzne funkcije sledećih funkcija:

$$(a) f(x) = 3x + 2$$

$$(b) f(x) = \frac{5x - 1}{3x + 2}$$

$$(c) f(x) = \frac{3}{4x - 1}$$

$$(d) f(x) = \sqrt[5]{x - 1}$$

$$(e) f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{2x + 3}}$$

$$(f) f(x) = 4e^{2x-1}$$

$$(g) f(x) = \frac{2^x}{2^x - 1}$$

$$(h) f(x) = \log_2(2 + 3x)$$

$$(i) f(x) = 3 \ln(2 - x)$$

rešenje:

$$(a) f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$(b) f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{5-3x}$$

$$(c) f^{-1}(x) = \frac{3+x}{4x}$$

$$(d) f^{-1}(x) = x^5 + 1$$

$$(e) f^{-1}(x) = \frac{8-3x^3}{2x^3}$$

$$(f) f^{-1}(x) = \frac{\ln(\frac{x}{4}) + 1}{2}$$

$$(g) f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{x-1}$$

$$(h) f^{-1}(x) = \frac{2^x - 2}{3}$$

$$(i) f^{-1}(x) = 2 - e^{\frac{x}{3}}$$

14. Neka je $f(x+1) = 3x+2$, $g(2x+3) = 2-3x$. Odrediti $f^{-1}(g(x))$.

rešenje:

$$f^{-1}(g(x)) = \frac{5}{2} - \frac{x}{2}$$

15. Ako je

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

odrediti $g(f(3)) - f(g(-2))$

rešenje: $-\frac{24}{5}$

16. Date su funkcije $f(x) = 1-x$ i $g(x) = 2-x$. Odrediti $f(g(x)) - g(f(x))$

rešenje: -2

17. Ako je $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ i $g(x) = x^3 - 1$, odrediti $g(f(x)) - 2f(g(x))$

rešenje: $-x$

18. Ako je $f(x) = 2x+3$ i $g(x) = x^2 - 4$, odrediti $g(f(x)) - 2f(g(x))$

rešenje: $12x + 15$

19. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, odrediti $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$

rešenje: 2

20. Ako je

$$f(x-1) = \frac{2x-1}{x+2}$$

odrediti $f(f(x))$

rešenje: $f(f(x)) = \frac{x+1}{x+2}$

21. Ako je $f(x) = \sqrt{x+1}$ i $g(x) = 4x-1$, izračunati $f(g(\frac{5}{4})) + g(f(\frac{5}{4}))$

rešenje: $5 + \sqrt{5}$

22. Ako je

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$$

odrediti $f\left(\frac{1}{2}\right)$

rešenje: $\frac{9}{4}$