APSOLUTNA VREDNOST BROJA

Definicija apsolutne vrednosti je:

Broj $\max\{x,-x\}$ **naziva se apsolutnom vrednošću broja** x **i označava se sa** $|x|$**.**

Oznaka $\max\{x,-x\}$ nam znači da od dva broja u zagradi izaberemo veći.

Na primer : $\max\{5,-5\}=5$, $\max\{-12,12\}=12$ **.....**itd.

Ova definicija nam govori da $|x|$ **ne može biti negativan broj.**

Na primer **:** $|-7|=7$**,** $|+32|=32$ ...itd.

Naši profesori često jednu teoremu daju kao definiciju apsolutne vrednosti:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{ako je } x>0 \\ 0, & \text{ako je } x=0 \\ -x, & \text{ako je } x<0 \end{cases}$$

a neki profesori ovo zapisuju i kao:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{ako je } x\geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x<0 \end{cases}$$

Nama je ovaj poslednji zapis najpogodniji za rešavanje zadataka, pa ćemo preporučiti da zapamtite:

$$\boxed{|\Theta|=\begin{cases} \Theta, & \text{ako je } \Theta\geq 0 \\ -\Theta, & \text{ako je } \Theta<0 \end{cases}}$$

Primer 1.

Po “definiciji“ (ovoj zadnjoj) razviti sledeće apsolutne vrednosti:

a) $|x-2|$

b) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|$

c) $|5-x|$

Rešenje:

a) $|x-2|$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{za } x-2\geq 0 \\ -(x-2), & \text{za } x-2<0 \end{cases}$$

Sad moramo još jedan korak da sredimo nejednačine:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{za } x-2\geq 0 \\ -(x-2), & \text{za } x-2<0 \end{cases}=\begin{cases} x-2, & \text{za } x\geq 2 \\ -x+2, & \text{za } x<2 \end{cases}$$

Dakle: $|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{za } x\geq 2 \\ -x+2, & \text{za } x<2 \end{cases}$

b) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|$

$$\left|\frac{1}{2}x+3\right|=\begin{cases} \frac{1}{2}x+3, & \text{za } \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}x+3\geq 0}}_{\text{izdvojimo na stranu}} \\ -\left(\frac{1}{2}x+3\right), & \text{za } \frac{1}{2}x+3<0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}x+3, & \text{za } x\geq -6 \\ -\frac{1}{2}x-3, & \text{za } x<-6 \end{cases}$$

Ako je nejednačina teža , izdvojite je " na stranu ":

$$\frac{1}{2}x+3\geq 0$$
$$\frac{1}{2}x\geq -3......./*2$$
$$x\geq -6$$

c) $|5-x|$

$$|5-x|=\begin{cases} 5-x, & \text{za } 5-x\geq 0 \\ -(5-x), & \text{za } 5-x<0 \end{cases}=\begin{cases} 5-x, & \text{za } x\leq 5 \\ -5+x, & \text{za } x>5 \end{cases}$$

gde je:

$$5-x\geq 0$$
$$-x\geq -5........./*(-1)$$
$$x\leq 5$$

Pazite : mora da se **okrene smer nejednakosti** kad se **množi sa negativnim brojem** nejednačina!

Primer 2.

Dokazati identitete:

a) $\dfrac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\begin{cases}3x, & \text{za } x\geq 0\\ \dfrac{x}{3}, & \text{za } x<0\end{cases}$

b) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$

c) $\left(\dfrac{a+2+|a+2|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a+2-|a+2|}{2}\right)^2=a^2+4a+4$

Rešenje:

a) $\dfrac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\begin{cases}3x, & \text{za } x\geq 0\\ \dfrac{x}{3}, & \text{za } x<0\end{cases}$

Najpre razvijemo apsolutnu vrednost datu u zadatku: $|x|=\begin{cases}x, & \text{ako je } x\geq 0\\ -x, & \text{ako je } x<0\end{cases}$

Sad nam je ustvari posao da radimo dva zadatka:

i) Umesto $|x|$ stavljamo x , ali uz uslov da je $x\geq 0$

ii) Umesto $|x|$ stavljamo - x , ali uz uslov da je $x<0$

i) $x\geq 0$

$$\frac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\frac{2x+x}{3}+x+x=\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}+2x=x+2x=\boxed{3x}$$

ii) $x<0$

$$\frac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\frac{2x+(-x)}{3}+x+(-x)=\frac{x}{3}+x-x=\boxed{\frac{x}{3}}$$

b) $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$

I ovde je $|x|=\begin{cases}x, & \text{ako je } x\geq 0\\ -x, & \text{ako je } x<0\end{cases}$ tako da ustvari opet radimo dva zadatka

i) Umesto $|x|$ stavljamo x , ali uz uslov da je $x\geq 0$

ii) Umesto $|x|$ stavljamo - x , ali uz uslov da je $x<0$

i) $x \geq 0$

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right)^2+0=x^2$$

ii) $x < 0$

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)^2+\left(\frac{x-(-x)}{2}\right)^2=0+\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}\right)^2=x^2$$

Ovim je dokaz završen.

c) $\left(\frac{a+2+|a+2|}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-|a+2|}{2}\right)^2=a^2+4a+4$

Najpre definišemo apsolutnu vrednost: $|a+2|=\begin{cases} a+2, & \text{za } a+2\geq 0 \\ -(a+2), & \text{za } a+2<0 \end{cases}=\begin{cases} a+2, & \text{za } a\geq -2 \\ -(a+2), & \text{za } a<-2 \end{cases}$

i) Umesto $|a+2|$ stavljamo $a+2$, ali uz uslov da je $a \geq -2$

ii) Umesto $|a+2|$ stavljamo $-a-2$, ali uz uslov da je $a < -2$

i) $a \geq -2$

$$\left(\frac{a+2+|a+2|}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-|a+2|}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{a+2+(a+2)}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-(a+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{\cancel{2}(a+2)}{\cancel{2}}\right)^2+0=(a+2)^2=\boxed{a^2+4a+4}$$

ii) $a < -2$

$$\left(\frac{a+2+|a+2|}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-|a+2|}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{a+2+(-(a+2))}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-(-(a+2))}{2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{a+2-(a+2)}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2+(a+2)}{2}\right)^2=$$

$$0+\left(\frac{\cancel{2}(a+2)}{\cancel{2}}\right)^2=(a+2)^2=\boxed{a^2+4a+4}$$

Ovim je dokaz završen.

Primer 3.

Reši jednačine:

a) $|x-3|=5$

b) $|2-x|=2x+4$

Rešenje:

a) $|x-3|=5$

Najpre definišemo apsolutnu vrednost:

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{za } x-3\ge 0 \\ -(x-3), & \text{za } x-3<0 \end{cases} = \begin{cases} x-3, & \text{za } x\ge 3 \\ -x+3, & \text{za } x<3 \end{cases}$$

Sad radimo dva zadatka:

<u>za $x\ge 3$</u>

$x-3=5$

$x=5+3$

$\boxed{x=8}$

Sad se pitamo da li je rešenje x = 8 dobro?

Radili smo za opciju $x\ge 3$ što znači da je rešenje dobro!

<u>za $x<3$</u>

$-x+3=5$

$-x=5-3$

$-x=2$

$\boxed{x=-2}$

I ovo rešenje je dobro jer zadovoljava uslov $x<3$.

Zaključujemo da ova jednačina ima dva rešenja x = 8 i x = -2.

b) $|2-x|=2x+4$

$$|2-x|=\begin{cases} 2-x, & \text{za } 2-x\ge 0 \\ -(2-x), & \text{za } 2-x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & \text{za } x\le 2 \\ -2+x, & \text{za } x>2 \end{cases}$$

za $x \le 2$

$$|2-x| = 2x+4$$
$$2-x = 2x+4$$
$$-x-2x = 4-2$$
$$-3x = 2$$
$$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

Rešenje je dobro jer $-\frac{2}{3} \le 2$

za $x > 2$

$$|2-x| = 2x+4$$
$$-2+x = 2x+4$$
$$x-2x = 4+2$$
$$-x = 6$$
$$\boxed{x = -6}$$

E ovo rešenje **nije dobro jer ne zadovoljava uslov da je** $x > 2$.

Zaključujemo da je jedino rešenje jednačine x = $-\frac{2}{3}$.

Primer 4.

Reši jednačinu $|x| + |x-2| = x+4$

Rešenje:

$$|x| + |x-2| = x+4$$

Najpre definišemo obe apsolutne vrednosti i označimo uslove sa I, II , III i IV:

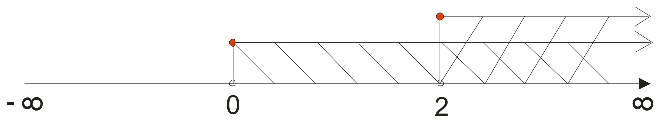
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \ge 0 \rightarrow \text{uslov I} \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \rightarrow \text{uslov II} \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{za } x-2 \ge 0 \\ -(x-2), & \text{za } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & \text{za } x \ge 2 \rightarrow \text{uslov III} \\ -x+2, & \text{za } x < 2 \rightarrow \text{uslov IV} \end{cases}$$

Sad kombinujemo uslov I i III, I i IV, pa II i III , II i IV.

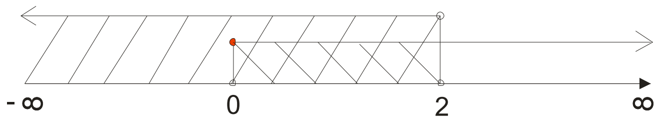
Ovo radimo da bi odredili intervale za x.

I i III to jest $x \geq 0, x \geq 2$



$x \in [2, \infty)$

I i IV to jest $x \geq 0, x < 2$

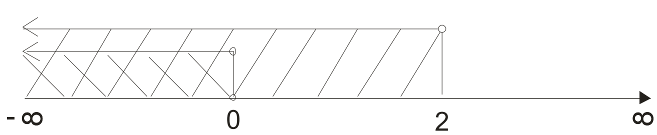


$x \in [0, 2)$

II i III to jest $x < 0, x \geq 2$

$x \in \varnothing$ pa ovde nemamo nikakav posao…..

II i IV to jest $x < 0, x < 2$



$x \in (-\infty, 0)$

Dakle imamo posao da radimo 3 zadatka :

Za interval $x \in [2, \infty)$ nam je jednačina $x + x - 2 = x + 4$

Za interval $x \in [0, 2)$ nam je jednačina $x - x + 2 = x + 4$

Za interval $x \in (-\infty, 0)$ nam je jednačina $-x - x + 2 = x + 4$

Kad nadjemo rešenja, ona moraju pripadati tom intervalu!

Za interval $x \in [2, \infty)$

$$x + x - 2 = x + 4$$
$$2x - 2 = x + 4$$
$$2x - x = 4 + 2$$
$$\boxed{x = 6}$$

Ovo je dobro rešenje jer je u intervalu.

Za interval $x \in [0, 2)$

$$x - x + 2 = x + 4$$
$$2 = x + 4$$
$$x = 2 - 4$$
$$\boxed{x = -2}$$

Ovo **nije rešenje**, jer naš interval ne obuhvata -2.

Za interval $x \in (-\infty, 0)$

$$-x - x + 2 = x + 4$$
$$-2x + 2 = x + 4$$
$$-2x - x = 4 - 2$$
$$-3x = 2$$
$$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

Ovo je dobro rešenje jer je u intervalu!

Zaključujemo da početna jednačina ima dva rešenja: $x = -\frac{2}{3}$ i $x = 6$.

Primer 5.

Rešiti nejednačinu $\left|\frac{1}{2}x + 3\right| \geq 2$

Rešenje:

$$\left|\frac{1}{2}x + 3\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & \text{za } \frac{1}{2}x + 3 \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}x + 3\right), & \text{za } \frac{1}{2}x + 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & \text{za } x \geq -6 \\ -\frac{1}{2}x - 3, & \text{za } x < -6 \end{cases}$$

Znači, trebamo rešiti dve nejednačine:

<u>za $x \geq -6$</u>

$$\left|\frac{1}{2}x+3\right| \geq 2$$

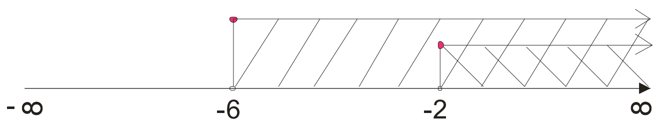
$$\frac{1}{2}x+3 \geq 2 .... / *2$$

$$x+6 \geq 4$$

$$x \geq 4-6$$

$$\boxed{x \geq -2}$$

Sad na brojevnoj pravoj upakujemo rešenje i uslov:



$$x \in [-2, \infty)$$

<u>za $x < -6$</u>

$$\left|\frac{1}{2}x+3\right| \geq 2$$

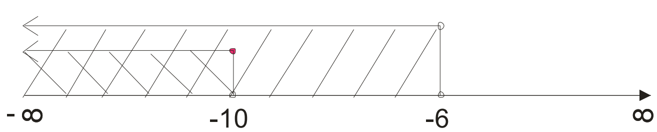
$$-\frac{1}{2}x-3 \geq 2 .... / *2$$

$$-x-6 \geq 4$$

$$-x \geq 4+6$$

$$\boxed{x \leq -10}$$

Opet na brojevnoj pravoj upakujemo rešenje i uslov:



$$x \in (-\infty, -10]$$

Konačno rešenje je unija ova dva: $\boxed{x \in (-\infty, -10] \cup [-2, \infty)}$

www.matematiranje.in.rs