NEKE VAŽNIJE NEJEDNAKOSTI

Naučili smo iz ranijih fajlova da transformišemo algebarske izraze. Pogodnim transformacijama možemo postići i to da izvedemo zaključak o **znaku** tih izraza, to jest da sa sigurnošću tvrdimo da je taj izraz pozitivan ili negativan za sve vrednosti promenljivih koje se u njemu javljaju.

Primer 1.

$x^2 \geq 0$ **za svako** $x \in R$

Kvadrat nekog izraza je uvek pozitivan ili jednak nuli (za x = 0)

$\rightarrow$ $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$ za $\forall x \in R$

$\rightarrow$ $-a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \leq 0$ za $\forall a \in R$

$\rightarrow$ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ jer

$$x^2 - xy + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

Izvršili smo dopunu od "punog kvadrata" pa je $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ i $\frac{3y^2}{4} \geq 0$, a onda je i njihov zbir $\geq$ 0

Primer 2.

Dokazati da je $\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3}{2} \geq x + y + z$

Rešenje: Sigurni smo da važi

$$(x-1)^2 \geq 0$$
$$(y-1)^2 \geq 0$$
$$(z-1)^2 \geq 0$$

Saberimo ove tri nejednakosti:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2x + 2y + 2z$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$$
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3}{2} \geq x + y + z$$

I dokazali smo šta je trebalo.

Primer 3.

Dokazati da za $\forall a > 0 \quad \Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$

Rešenje:

Krenemo od nečega za šta smo sigurni da je tačno $(a-1)^2 \geq 0$ i transformišemo…

$$(a-1)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$a^2 + 1 \geq 2a............./:a \text{ (podelimo sa } a\text{)}$$
$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Primer 4.

Dokazati da za $\forall x \geq 0$ **i** $\forall y \geq 0$ **važi** $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ **(geometrijska sredina ≤ aritmetička sredina)**

Rešenje:

Krenemo od onoga za šta smo sigurni da je tačno pa opet transformišemo….

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$
$$\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \geq 0$$
$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$
$$x + y = 2\sqrt{xy} \;/:2$$
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Naravno jednakost važi ako je $x = y$

Primer 5.

Dokazati da za $\forall x, y, z$ **koji su nenegativni važi** $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$

Rešenje:

Uvodimo najpre smene: $x = a^3$

$$y = b^3$$
$$z = c^3$$

Treba onda dokazati:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$\sqrt[3]{a^3b^3c^3} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

$$3abc \leq a^3+b^3+c^3$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$$

Kako je $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$
(proveri množenjem)

odavde je $a+b+c \geq 0$ sigurno a važi

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$$

Dakle proizvod dva takva izraza je ≥ 0 pa je zaista:

$$abc \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \quad \text{to jest} \quad \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

Znak = je ako je $x=y=z$

Primer 6.

Dokazati da tri proizvoda $(1-a)\cdot b$, $(1-b)\cdot c$ i $(1-c)\cdot a$ gde su *a, b* i *c* takvi da važi :

0 < *a* < 1, 0 < *b* < 1 i 0 < *c* < 1, <u>ne mogu</u> <u>istovremeno</u> biti veći od $\frac{1}{4}$.

Rešenje:

Krenemo opet od nejednakosti koja sigurno važi: $\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 \geq 0$, malo transformišemo

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4}-a+a^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{4} \geq a-a^2$$

$$\boxed{\frac{1}{4} \geq a(1-a)} \rightarrow \boxed{a(1-a) \leq \frac{1}{4}}$$

Ovo naravno važi i za *b* i *c*.

Ako bi važilo da su gornji izrazi svi istovremeno veći od $\frac{1}{4}$, važilo bi:

$$(1-a)\cdot b > \frac{1}{4}$$
$$(1-b)\cdot c > \frac{1}{4}$$
$$(1-c)\cdot a > \frac{1}{4}$$

I kad pomnožimo ove tri nejednakosti (leve sa levim, desne sa desnim stranama), dobili bi:

$$a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) > \frac{1}{64}$$

Sad ovde upotrebimo što smo malopre našli $a(1-a) \le \frac{1}{4}$, $b(1-b) \le \frac{1}{4}$, $c(1-c) \le \frac{1}{4}$

Pa bi leva strana bila $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) \le \frac{1}{64}$ **što je u suprotnosti sa** $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c) > \frac{1}{64}$**.**

Dakle , nemoguće je da su sva tri proizvoda istovremeno veća od $\frac{1}{4}$

Primer 7.

Dokazati da je $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot..........\cdot\frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}$

Rešenje:

Najpre ćemo označiti da je $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot..........\cdot\frac{9999}{10000} = x$

Znamo da važi:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$
....
$$\frac{9999}{10000} < \frac{10000}{10001}$$

Pomnožimo sve ove nejednakosti, I na levoj strani je $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot..........\cdot\frac{9999}{10000} = x$, pa imamo:

$$x < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot .... \cdot \frac{10000}{10001}$$

odnosno:

$$x < \frac{1}{10001 \cdot x}$$ pa je

$$x^2 < \frac{1}{10001}$$

Znamo da je $10001 > 10000 \rightarrow \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000}$

$$x^2 < \frac{1}{10001} < \frac{1}{10000}$$

$$x^2 < \frac{1}{10000} \text{..........korenujemo}$$

$$\boxed{x < \frac{1}{100}}$$

I dokazali smo traženu nejednakost.