

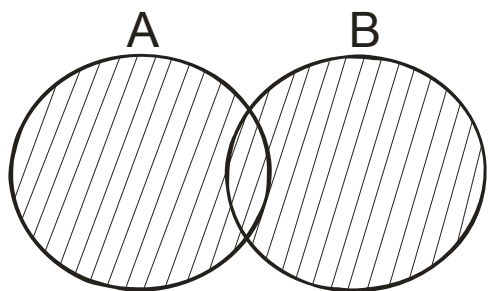
DOKAZIVANJE SKUPOVNIH JEDNAKOSTI

Pisali ste nam da profesori u I godini traže dokazivanje skupovnih jednakosti pomoću tablica sa \in i \notin .

U ovom fajlu ćemo pokušati da objasnimo postupak.

Najpre da se podsetimo skupovnih operacija.

UNIJA



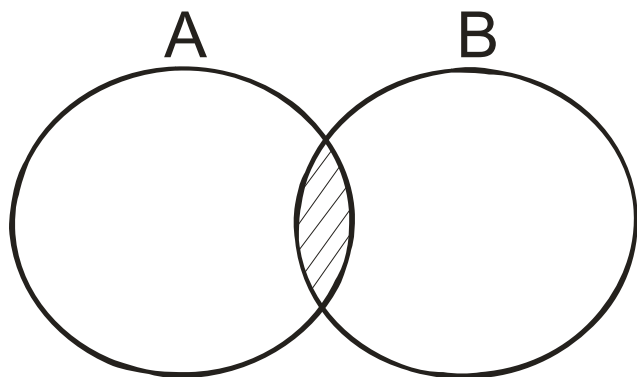
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Tablica sa \in i \notin bi za uniju izgledala:

A	B	$A \cup B$
\in	\in	\in
\in	\notin	\in
\notin	\in	\in
\notin	\notin	\notin

Najlakše je da zapamtimo : Ako ide \notin pa \notin , onda je \notin , a za sve ostale situacije pišemo \in .

PRESEK



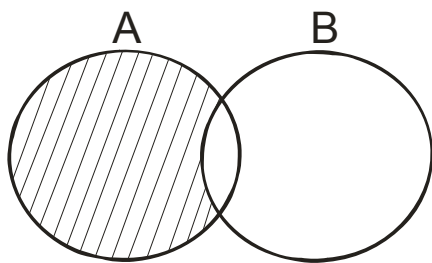
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Tablica sa \in i \notin bi za presek izgledala:

A	B	$A \cap B$
\in	\in	\in
\in	\notin	\notin
\notin	\in	\notin
\notin	\notin	\notin

Pamtimo: Ako ide \in pa \in , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .

RAZLIKA



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Tablica sa \in i \notin bi za razliku izgledala:

A	B	$A \setminus B$
\in	\in	\notin
\in	\notin	\in
\notin	\in	\notin
\notin	\notin	\notin

Pamtimo: Ako ide \in pa \notin , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .

Evo nekoliko primera.....

Primer 1.

Dokazati skupovnu jednakost $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Rešenje:

U fajlu “ O skupovima” smo objasnili kako se skupovna jednakost dokazuje korišćenjem definicija i svodjenjem na tautologiju.

Dokažimo je sada preko tablica sa \in i \notin .

Najpre pravimo tablicu, slično kao kod tautologije:

Leva strana (L)

Desna strana(D)

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in						
\in	\in	\notin						
\in	\notin	\in						
\in	\notin	\notin						
\notin	\in	\in						
\notin	\in	\notin						
\notin	\notin	\in						
\notin	\notin	\notin						

Kao kod dokazivanja tautologije popunjavamo prvu vrstu, i pišemo:

Ispod skupa A prvo 4 \in , pa 4 \notin .

Ispod skupa B neizmenično 2 \in , pa 2 \notin .

Ispod skupa C neizmenično 1 \in , pa 1 \notin .

Dalje nam treba $A \cup B$, a rekosmo da zapamtimo: **Ako ide \notin pa \notin , onda je \notin , a za sve ostale pišemo \in .**

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\in					
\in	\in	\notin	\in					
\in	\notin	\in	\in					
\in	\notin	\notin	\in					
\notin	\in	\in	\in					
\notin	\in	\notin	\in					
\notin	\notin	\in	\notin					
\notin	\notin	\notin	\notin					

Dalje popunjavamo $(A \cup B) \cap C$ koje smo obeležili sa **L (leva strana jednakosti)**.

Za presek nam treba : **Ako ide \in pa \in , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .**

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\in	\in				
\in	\in	\notin	\in	\notin				
\in	\notin	\in	\in	\in				
\in	\notin	\notin	\in	\notin				
\notin	\in	\in	\in	\in				
\notin	\in	\notin	\in	\notin				
\notin	\notin	\in	\notin	\notin				
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin				

↑
gledamo ove dve kolone i radimo presek

Završili smo levu stranu jednakosti, sad radimo desnu, popunjavamo najpre $A \cap C$, pa $B \cap C$ koristeći da :

Ako ide \in pa \in , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\in	\in	\in	\in		
\in	\in	\notin	\in	\notin	\notin	\notin		
\in	\notin	\in	\in	\in	\in	\notin		
\in	\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin		
\notin	\in	\in	\in	\in	\notin	\in		
\notin	\in	\notin	\in	\notin	\notin	\notin		
\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin		
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin		

Ostala nam je cela leva strana, gledamo kolone $A \cap C$ i $B \cap C$ a radimo uniju:

Ako ide \notin pa \notin , onda je \notin , a za sve ostale pišemo \in .

L

D

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
€	€	€	€	€	€	€	€	
€	€	∅	€	∅	∅	∅	∅	
€	∅	€	€	€	€	∅	€	
€	∅	∅	€	∅	∅	∅	∅	
∅	€	€	€	€	∅	€	€	
∅	€	∅	€	∅	∅	∅	∅	
∅	∅	€	∅	∅	∅	∅	∅	
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	

Konačno, uporedjemo da li je leva strana jednaka desnoj, ako jeste pišemo T a ako nije \perp .

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$	L=D
€	€	€	€	€	€	€	€	T
€	€	∅	€	∅	∅	∅	∅	T
€	∅	€	€	€	€	∅	€	T
€	∅	∅	€	∅	∅	∅	∅	T
∅	€	€	€	€	∅	€	€	T
∅	€	∅	€	∅	∅	∅	∅	T
∅	∅	€	∅	∅	∅	∅	∅	T
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	T

Ovim bi dokaz bio završen!

Primer 2.

Dokazati skupovnu jednakost $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

Rešenje:

Crtamo tablicu i popunjavamo prvu vrstu:

Leva strana (L)

Desna strana(D)

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
∈	∈	∈						
∈	∈	∉						
∈	∉	∈						
∈	∉	∉						
∉	∈	∈						
∉	∈	∉						
∉	∉	∈						
∉	∉	∉						

Popunjavamo kolonu $A \setminus B$.

Da se podsetimo: **Ako ide ∈ pa ∉, pišemo ∈, a za sve ostale situacije pišemo ∉.**

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
∈	∈	∈	∉					
∈	∈	∉	∉					
∈	∉	∈	∈					
∈	∉	∉	∈					
∉	∈	∈	∉					
∉	∈	∉	∉					
∉	∉	∈	∉					
∉	∉	∉	∉					

Sad gledamo kolonu $A \setminus B$ i C a operacija je \cap . **Ako ide ∈ pa ∈, pišemo ∈, a za sve ostale situacije pišemo ∉.**

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
∈	∈	∈	∉	∉				
∈	∈	∉	∉	∉				
∈	∉	∈	∈	∈				
∈	∉	∉	∈	∉				
∉	∈	∈	∉	∉				
∉	∈	∉	∉	∉				
∉	∉	∈	∉	∉				
∉	∉	∉	∉	∉				

Dalje gledamo kolonu $A \cap C$ i $B \cap C$.

Ako ide \in pa \in , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\notin	\notin	\in	\in		
\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin		
\in	\notin	\in	\in	\in	\in	\notin		
\in	\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin		
\notin	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\in		
\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin		
\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin		
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin		

Završavamo desnu stranu, radeći razliku prethodna dva, naravno po pravilu:

Ako ide \in pa \notin , pišemo \in , a za sve ostale situacije pišemo \notin .

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\notin	\notin	\in	\in	\notin	
\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	
\in	\notin	\in	\in	\in	\in	\notin	\in	
\in	\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	
\notin	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\in	\notin	
\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	
\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	

I još da potvrdimo da je leva strana jednaka sa desnom, proverimo i :

A	B	C	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cap C$	$A \cap C$	$B \cap C$	$(A \cap C) \setminus (B \cap C)$	L=D
\in	\in	\in	\notin	\notin	\in	\in	\notin	T
\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	T
\in	\notin	\in	\in	\in	\in	\notin	\in	T
\in	\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	T
\notin	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\in	\notin	T
\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	T
\notin	\notin	\in	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	T
\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	\notin	T

Dokazali smo skupovnu jednakost!