Uvod u geometriju (aksiome)

Sama reč geometrija potiče još od davnina , a njen bukvalan prevod znači merenje zemlje-zemljomerstvo.

Iz istorijskih izvora je poznato da su još stare civilizacije Sumeraca, Egipćana, Vavilonaca i drugih imali i koristili mnoga saznanja o uglovima, trouglovima, četvorouglovima....

U VI veku pre nove ere Grci preuzimaju vodstvo u razvoju geometrije. Oni preuzimaju znanja od drugih naroda ali ih po prvi put sistematizuju i proveravaju (dokazuju). Svima su nam dobro poznate teoreme Talesa, Pitagore....

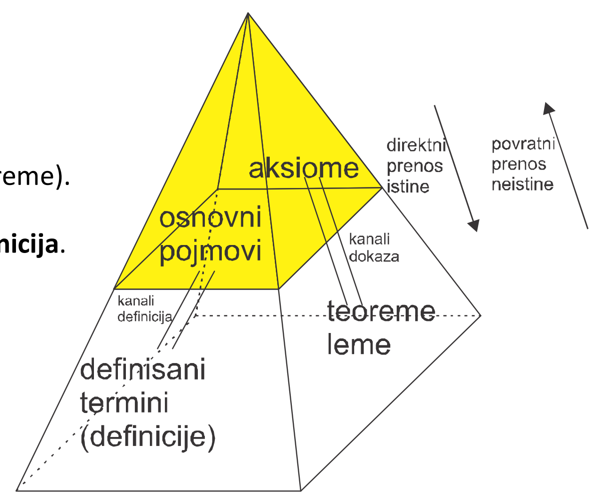
Ipak, za geometriju je najznačajnije ime u istoriji matematike : EUKLID.

Negde oko 300. godine pre nove ere on objavljuje svoje kapitalno delo “ELEMENTI” koje će vekovima biti smatrano najsavršenijim matematičkim delom.

Iako geometrija u ovom delu savršeno opisuje prostor u kome živimo, uočeni su neki nedostaci.

Naime, Euklid je pokušao da definiše svaki pojam koji je koristio, pa tako , na primer: “ Tačka je ono čiji je deo ništa” ili “Prava je linija jednako postavljena u odnosu na sve svoje tačke”.

Savremena matematika ima drugačiji pristup. Pokušaćemo da Vam to objasnimo preko takozvane “Piramide znanja”.



Na vrhu piramide se nalaze **osnovni pojmovi i aksiome**.

(aksioma je tvrdjenje koje se ne dokazuje već se uzima da je tačna)

Ispod njih su ostali, **definisani termini, teoreme, leme** (kao male teoreme).

Definisani termini su povezani sa osnovnim terminima **kanalima definicija**.

Tako, u slučaju ugradjivanja značenja u osnovne termine, ono će poteći kanalima definicija i ispuniti sve termine teorije.

Na sličan način su aksiome i teoreme povezane **kanalima dokaza**.

U slučaju ugradjivanja istine u aksiome, ona će poteći ovim kanalima dokaza i ispuniti sve teoreme teorije. Ovo je takozvani **direktni prenos istine**.

Ugradjivanjem neistina u aksiome, ne dolazi ni do kakvog toka kanalima dokaza, jer prema zakonu „Iz lažnog proizvoljno“ iz lažne pretpostavke se može izvući bilo kakav zaključak. Kaže se još da ne postoji direktan prenos neistine!

Ali, ako neistinu ugradimo u teoreme na dnu piramide, onda će se ona, prema zakonu kontrapozicije, penjati kanalima dokaza ka vrhu piramide, a ovim se ostvaruje **povratni prenos neistine**, koji nazivamo još opovrgavanje ili pobijanje.

Dakle, Euklidu se zamera što je pokušao da za sve nadje neku definiciju.

Naši osnovni pojmovi i relacije su:

Osnovni pojmovi su: **tačka, prava i ravan.**

Osnovne relacije su : **biti izmedju i biti podudaran.**

Skup svih tačaka je trodimenzionalan prostor,najčešće u oznaci E^3 **.**

Tačke su elemeniti trodimenzionalnog prostora i označavamo ih velikim slovima A,B,C,......

Prave su podskupovi trodimenzionalnog prostora i označavamo ih malim slovima a,b,c,.......

Ravni su podskupovi trodimenzionalnog prostora i označavamo ih grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma,$.......

Relacija **izmedju** je troelementna relacija, na primer, ako je tačka B izmedju tačaka A i C zapisujemo A-B-C.

Relacija **podudaran** je četvoroelementna relacija , na primer, $(A,B) \cong (C,D)$ (a neko piše i $\{A,B\} \cong \{C,D\}$)

označava da su ovi parovi tačaka podudarni.

Za tačke koje pripadaju jednoj pravoj kažemo da su **kolinearne.**

U suprotnom su **nekolinearne.**

Za tačke koje pripadaju jednoj ravni kažemo da su **komplanarne.**

U suprotnom su **nekomplanarne.**

Neprazan skup tačaka nazivamo geometrijska figura, ili samo **figura**.

Rekli smo već da su aksiome tvrdjenja koja se ne dokazuju, već se uzimaju da su tačna. Neki profesori bi rekli da su to „činjenične istine ovog sveta, a da snaga dokaza proizilazi iz te njihove istinitosti“.

Aksiome su podeljenje u 5 grupa. Mi ćemo ih navesti zajedni sa neophodnim definicijama i teoremama iz svake grupe bez radjenja dokaza (Većinu dokaza imate u svojim udžbenicima) a u sledećem fajlu ćemo raditi zadatke koji profesori najčešće traže.

Grupe sa aksiomama su:

Aksiome pripadanja (9 aksioma)

Aksiome poredka (6 aksioma)

Aksiome podudarnosti (7 aksioma)

Aksiome neprekidnosti (2 aksiome)

Aksioma paralelnosti (1 aksioma)

Aksiome pripadanja (incidencije)

1. **Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.**
2. **Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B.**
3. **Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve različite tačke A i B.**
4. **Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A,B,C.**
5. **Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke A,B,C.**
6. **Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A,B,C.**
7. **Ako dve različite tačke A i B neke prave p pripadaju ravni π ,tada sve tačke prave p pripadaju ravni π .**
8. **Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B.**
9. **Postoje četiri nekomplanarne tačke A,B,C,D.**

Ovo su aksiome, a posledice koje nam trebaju za rešavanje zadataka su:

Teorema 1.

Postoji jedna i samo jedna prava koja sadrži dve različite tačke A i B.

Teorema 2.

Postoji jedna i samo jedna ravan koja sarži tri nekolinearne tačke A,B i C.

Teorema 3.

Prava i tačka van prave odredjuju jednu ravan .

Teorema 4.

Dve prave koje se seku odredjuju jednu ravan.

Teorema 5.

Ako dve različite ravni poseduju najmanje jednu zajedničku tačku, one se seku po jednoj pravoj.

Aksiome poredka

1. **Ako su A,B i C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada su svake dve od tačaka A,B,C medju sobom različite.**
2. **Ako su A,B,C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada je C-B-A.**
3. **Ako su A,B,C tri kolinearne tačke takve da je A-B-C, tada nije A-C-B.**
4. **Ako su A i B dve različite tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka C , takva da je A-B-C.**
5. **Ako su A,B,C tri različite kolinearne tačke ,tada važi najmanje jedna od relacija A-B-C, A-C-B, C-A-B.**
6. **(Pašova aksioma) Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A seče pravu BC u tački P takvoj da je B-P-C, tada prava p seče pravu AC u tački Q takvoj da je A-Q-C ili pravu AB u tački R takvoj da je A-R-B**

Teorema 1.

Ako su A i B dve različite tačke, tada postoji tačka C izmedju tačaka A i B .

Aksiome podudarnosti

1. **Ako je $(A,B)\cong(C,D)$ i A=B ,tada je C=D.**
2. **Za svake dve tačke A i B imamo da je $(A,B)\cong(B,A)$.**
3. **Ako tačke A,B,C,D,E,F zadovoljavaju relacije $(A,B)\cong(C,D)$ I $(A,B)\cong(E,F)$,tada je $(C,D)\cong(E,F)$**
4. **Ako su C i C` tačke otvorenih duži (AB) i (A`B`) takve da je $(A,C)\cong(A`,C`)$ i $(B,C)\cong(B`,C`)$ tada je i $(A,B)\cong(A`,B`)$**
5. **Ako su A i B dve različite tačke i C kraj neke polupprave p, tada na polupravoj p postoji tačka D takva da je $(A,B)\cong(C,D)$**
6. **Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke i A,B tačke ruba neke poluravni π takve da je $(A,B)\cong(A`,B`)$, tada u poluravni π postoji jedinstvena tačka C` takva da je $(A,C)\cong(A`,C`)$ i $(B,C)\cong(B`,C`)$.**

Teorema 1.

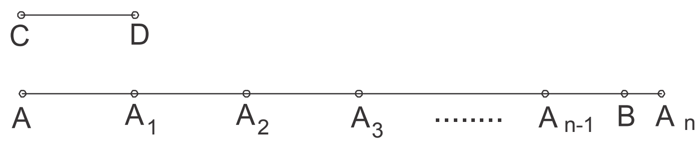
Relacija podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.

Aksiome neprekidnosti

1. **Eudeks-Arhimedova aksioma (aksioma prestiživosti)**
   Neka su AB i CD bilo koje duži.

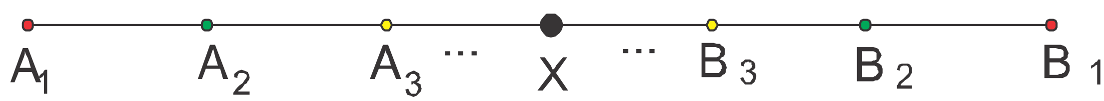
Tada na pravoj AB postoji konačan broj tačaka $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n$ **takvih da je** $B \in (A_{n-1}, A_n)$ **i**

$A_1 - A_2 - A_3 -, ..., -A_{n-1} - A_n$ **i** $(C, D) \cong (A, A_1) \cong (A_1, A_2) \cong .... \cong (A_{n-1}, A_n)$



2. **Kantorova aksioma neprekidnosti**
   Neka je na izvesnoj pravoj p dat beskonačni niz duži $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...$ **koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:**
   i) Svaka duž tog niza duži sadrži sledeću duž
   ii) Ne postoji duž koja pripada svim dužima tog niza

   Tada postoji tačka X koja pripada svim dužima tog niza.



Aksioma paralelnosti

Plejferova aksioma paralelnosti

1. **Neka je *p* proizvoljna prava i *A* tačka van nje. Tada postoji jedinstvena prava *a* koja je komplanarna sa pravom *p* i koja zadovoljava relacije** $A \in a$ i $a \cap p = \varnothing$

www.matematiranje.in.rs